Conclusion : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, on a : $1-\frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1-\frac{x^2}{\pi}$.

2°/• Soit $k(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$; k est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $k'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos x \le 0$ (d'après 1°/).

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$k'(x)$		–	
$k(x)$	0	(–)	

donc $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $k(x) \le 0 \Rightarrow x-\frac{x^3}{6} \le \sin x$.

• Soit $h(x)=\sin x - x + \frac{x^3}{3\pi}$

h est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, $h'(x)=\cos x - 1 - \frac{x^2}{\pi} \le 0$ (d'après 1°/)

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		–	
$h(x)$	0	(–)	

donc $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $h(x) \le 0$ et par suite $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin x \le x-\frac{x^3}{3\pi}$.

Conclusion : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x-\frac{x^3}{3\pi}$.

3°/ On a : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x-\frac{x^3}{3\pi} \Rightarrow -\frac{x^3}{6} \le \sin x - x \le -\frac{x^3}{3\pi}$

$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $-\frac{x}{6} \le \frac{\sin x - x}{x^2} \le -\frac{x}{3\pi}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{x}{6} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{x}{3\pi} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$.